Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Benjamin Berkels

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen IV (CES) | WS 2019
Klausur | 26.02.2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 11.03.2020 von 14:00–15:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstraße 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	5	6	8	9	4	6	8	4	50
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gegeben ist das PDE-System 1. Ordnung für $U : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 + 3\,\partial_{x_1} u_2 + 2\,\partial_{x_2} u_1 + \partial_{x_2} u_2 &= 0 \\ \partial_t u_2 + \partial_{x_1} u_2 + 3\,\partial_{x_2} u_2 &= 0 \\ \partial_t u_3 + 2\,\partial_{x_1} u_2 + 3\,\partial_{x_1} u_3 + 2\,\partial_{x_2} u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das System in der Form

$$\partial_t U + \mathrm{div} F(U) = 0$$

geschrieben werden kann und überprüfen Sie ob das System hyperbolisch ist.

5 Punkte

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie die Lösungen des Randwertproblems

$$-u''(x) = 1, \qquad \forall x \in (0,1),$$

in Abhängigkeit von den Werten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ für jede der folgenden Randbedingungen

a.1) $u(0) = \alpha$ und $u(1) = \beta$,

a.2) $u(0) = \alpha$ und $\dfrac{\partial u}{\partial n}(1) = \beta$,

a.3) $\dfrac{\partial u}{\partial n}(0) = \alpha$ und $u(1) = \beta$,

a.4) $\dfrac{\partial u}{\partial n}(0) = \alpha$ und $\dfrac{\partial u}{\partial n}(1) = \beta$.

b) Das reine Neumann Problem a.4) ist nicht für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ lösbar. Wie lautet die Bedingung an α und β damit eine Lösung existiert? Ist die Lösung u dann eindeutig? Begründen Sie ihre Antwort.

c) Welche Bedingung muss eine Randfunktion g in dem Neumann-Problem der mehrdimensionalen Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

für gegebenes f erfüllen?

<u>Hinweis:</u> $\Delta \cdot = \operatorname{div}(\nabla \cdot)$

4+1+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie die ersten zwei distributionellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x. \end{cases}$$

b) Welche Eigenschaft muss die distributionelle Ableitung der Dirac-Funktion erfüllen?

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $\gamma : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\gamma(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r(x)}, \qquad r(x) = \|x\|_2$$

eine Fundamentallösung der 3-dimensionalen Laplacegleichung

$$-\Delta\gamma = \delta$$

ist.

3.5+1+3.5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

Gegeben ist das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_{xx} u(x,t) - u(x,t) + \sin(\pi x), && x \in (0,1), t > 0 \\ u(0,t) &= 0, && t > 0 \\ u_x(1,t) &= 0, && t > 0 \\ u(x,0) &= a, && x \in (0,1) \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, das heißt die Anfangsbedingung ist eine konstante Funktion.

a) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen.

b) Entwickeln Sie die Anfangsbedingung und den Quellterm in Eigenfunktionen.

c) Berechnen Sie die Lösung des Problems mit dem Eigenfunktionen-Ansatz.

3+2.5+3.5 Punkte

Aufgabe 5.
Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}$
$f(x_k)$	6	$2+2i$	2	$2-2i$

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f) e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f;x_k) = f(x_k), \text{ für } k = 0,..,3$$

erfüllt.

4 Punkte

Aufgabe 6.

Die erste Ableitung einer Funktion u an der Stelle ξ soll mit Hilfe einer Differenzenformel, die die Funktionsauswertungen von u an den Stellen ξ, $\xi + h_1$ und $\xi + h_1 + h_2$ benutzt, approximiert werden, d.h.

$$u'(\xi) = a\,u(\xi) + b\,u(\xi + h_1) + c\,u(\xi + h_1 + h_2) + R(u, h),$$

wobei $h = \max(h_1, h_2)$ und $R(u, h) = \mathcal{O}(h^p)$ der Fehler der Differenzenformel ist. Bestimmen Sie a, b, c so, dass p maximal wird. Wie groß ist dieses?

Hinweis: Entwickeln Sie u um die Stelle ξ.

6 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

mit Lösung

$$x = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 4 \\ -20 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

a) Konvergieren das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren für jeden Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^3$?

b) Führen Sie einen Schritt mit dem Gauß-Seidel-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (1, 0, 0)^T$.

c) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen zur Anwendung des CG-Verfahrens gegeben sind und führen Sie einen Schritt mit dem CG-Verfahren durch. Verwenden Sie als Startvektor $x^0 = (0, -1, -1)^T$.

d) Welches Ergebnis erhält man nach drei Schritten mit dem CG-Verfahren?

2.5+1.5+3+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \qquad x \in (0,1) \\ u(0) &= 1, \\ u(1) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $c, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig sind mit

$$c(x) > 0, \qquad x \in [0,1].$$

a) Nehmen Sie eine Finite-Differenzen-Diskretisierung für diese Differentialgleichung vor, wobei das Intervall $[0,1]$ äquidistant in 4 Teilintervalle zerlegt werden soll, und stellen Sie das diskrete System in der Form

$$A_h u_h = f_h$$

auf.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix A_h symmetrisch und positiv definit (es genügt zu zeigen, dass die Eigenwerte positiv sind) ist.
Hinweis: Gerschgorin Kreise.

3+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: