Aufgabe 1. Gegeben sei die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \langle \nabla u(x,y), (1,1) \rangle &= e^{x+2y} - u(x,y) \qquad && (x,y) \in \Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{M}} \\ u(x,y) &= 0 && (x,y) \in \mathrm{M} := \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta = 0\} \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die charakteristischen Grundkurven für diese Transportgleichung an.

(b) Ermitteln Sie mithilfe der Charakteristikenmethode einen Kandidaten u für die Lösung dieser Transportgleichung.

(c) Verifizieren Sie, dass Ihr Kandidat u aus Teil (b) die Transportgleichung erfüllt.

1+2.5+0.5 Punkte

Aufgabe 2. Sei $f \in S(\mathbb{R})$ eine ungerade Funktion, d.h. $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Sinustransformierte von f ist definiert durch

$$\mathcal{F}_s(f)(\xi) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\sin(x\xi)dx.$$

Weiterhin bezeichnen

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-ix\xi}dx$$

die Fouriertransformierte, und

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty g(x)e^{ix\xi}dx$$

die inverse Fouriertransformierte.

(a) Zeigen Sie den Zusammenhang

$$\mathcal{F}(f) = -i\mathcal{F}_s(f).$$

(b) Benutzen Sie das Ergebnis aus (a) um die Parseval-Gleichung

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \int_0^\infty |\mathcal{F}_s(f)(\xi)|^2 d\xi$$

zu zeigen.

(c) Finden Sie einen Zusammenhang zwischen der Sinus- und der inversen Fouriertransformation, und zeigen Sie

$$f = \mathcal{F}_s(\mathcal{F}_s(f)).$$

1+1+1 Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei die Potentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x) =& 0, \qquad x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) =& g(x), \quad x \in \partial B_1(0). \end{aligned}$$

Es sei $u \in C(\overline{B_1(0)}) \cap C^2(B_1(0))$ eine Lösung dieser Gleichung für

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle e_n + x, x\rangle, \quad x \in \partial B_1(0),$$

wobei e_n der n-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.
Berechnen Sie u(0). 2 Punkte

Aufgabe 4. Bestimmen Sie eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung des Rand-Anfangswert-problems:

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) &= 0, && t > 0,\ x \in (-\pi,\pi) \\
u(t,-\pi) &= u(t,\pi), && t > 0 \\
\partial_x u(t,-\pi) &= \partial_x u(t,\pi), && t > 0 \\
u(0,x) &= \cos(2x), && x \in (-\pi,\pi)
\end{aligned}
$$

4.5 Punkte

Aufgabe 5. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\text{(AWP)} \qquad y' = -\lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad \lambda > 0.$$

(a) Geben Sie jeweils einen Ausdruck in Abhängigkeit von y_0 für das explizite Euler-Verfahren sowie die Trapezmethode mit der Schrittweite h zur Berechnung einer Approximationslösung von (AWP) an.

(b) Untersuchen Sie das Verhalten der exakten Lösung von (AWP) für $t \to \infty$. Ergibt sich eine Bedingung an das explizite Euler-Verfahren bzw. die Trapezmethode, damit das gleiche Verhalten für die jeweilige Approximationslösung zutrifft?

(c) Welche Stabilitätsbegriffe erfüllen diese Verfahren?

1.5+1.5+1 Punkte

Aufgabe 6. Die Auslenkung eines idealisierten Pendels sei durch folgende Differentialgleichung für den Winkel $\phi(t)$ gegeben:

$$\phi''(t) + \sin(\phi(t)) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 1$$

(a) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung.

(b) Führen Sie 2 Schritte des expliziten Euler-Verfahrens mit Schrittweite h durch.

(c) Stellen Sie eine neue Differentialgleichung mit denselben Randbedingungen unter Ausnutzung der häufig verwendeten Näherung für kleine Winkel, $\sin(\phi) \approx \phi$, auf. Lösen Sie die neue Differentialgleichung und vergleichen Sie den Wert $\phi(2h)$ mit dem Ergebnis aus (b).

1+1+1 Punkte

Aufgabe 7. Gegeben sei folgendes lineares 2-Schritt-Verfahren:

$$y^{j+2} = y^{j+1} + \frac{h}{3}\left(-\frac{1}{4}f(t_j, y^j) + \alpha f(t_{j+1}, y^{j+1}) + \frac{5}{4}f(t_{j+2}, y^{j+2})\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass ein α existiert, so dass das Verfahren Konsistenzordnung 3 besitzt.

(b) Gibt es ein α so dass die Konsistenzordnung sogar 4 ist?

(c) Was können Sie über die Konvergenzordnung des Verfahrens aussagen?

2+0.5+1 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben sei die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t),\ t > 0,\ x \in (0,1) \tag{1}$$

mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = u_0(x)$$

und den Randwerten

$$u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Außerdem sei das Gitter $0 = x_0, \ldots, x_n = 1$ mit $x_{j+1} - x_j = h_x,\ 0 \le j \le n-1$ gegeben.

(a) Diskretisieren Sie die Ortsableitung in Gleichung (1), unter der Annahme

$$y_j(t) \approx u(x_j, t),$$

um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$y' = Ay,\ A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},\ y \in \mathbb{R}^{n-1}$$

zu erhalten.

(b) Formulieren Sie die Trapezregel und das implizite Eulerverfahren (jeweils mit konstanter Schrittweite h_t) zur Lösung der Systems aus Teil (a). Welches Verfahren würden Sie hinsichtlich der Konsistenzordnung bevorzugen?

1.5+1.5 Punkte