Aufgabe 1. Gegeben sei die Transportgleichung

$$\begin{cases} \langle \nabla u(x,\, y),\, (1,\, x^2) \rangle &=& 0, & (x,\, y) \in \Omega := (0,\, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,\, y) &=& \sin(y), & (0,\, y) \in \partial\Omega = \{\, 0 \,\} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Geben Sie die charakteristischen Grundkurven für diese Transportgleichung an.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Charakteristikenmethode einen Kandidaten u für die Lösung dieser Transportgleichung.

c) Verifizieren Sie, dass Ihr Kandidat u aus Teil b) die Transportgleichung erfüllt.

$1.5 + 1.5 + 1$ Punkte

Aufgabe 2. Gegeben sei die Potentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u(x,\,y) &= \cos(y), & (x,\,y) \in S := \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}), \\ u(x,\,\pm\frac{\pi}{2}) &= 0, & (x,\,\pm\frac{\pi}{2}) \in \partial S = \mathbb{R} \times \{\,-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\,\}. \end{cases}$$

a) Geben Sie eine Lösung u dieser Potentialgleichung an.

b) Bestimmen Sie

$$\max\left\{\,\tilde{u}(x,\,y) - u(x,\,y)\;:\;(x,\,y) \in \overline{S}\,\right\}$$

für den Fall, dass $\tilde{u}$ die Potentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}(x,\,y) &= \cos(y), & (x,\,y) \in S, \\ \tilde{u}(x,\,\pm\frac{\pi}{2}) &= \pm\sin(x), & (x,\,\pm\frac{\pi}{2}) \in \partial S \end{cases}$$

erfüllt.

Hinweis: Welche Eigenschaft hat $u - \tilde{u}$?

2 + 1.5 Punkte

Aufgabe 3. Bestimmen Sie eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in (-\pi, \pi), \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi), & t > 0, \\ u(0,x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \cos(jx), & x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

2 Punkte

Aufgabe 4. Gegeben sei die Wellengleichung

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) &= 0, \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= u_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,x) &= v_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Geben Sie eine Lösung u dieser Wellengleichung an für den Fall, dass u_0 und v_0 durch
$$u_0(s) = e^{-s^2}, \quad s\in\mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad v_0(s) = e^{-s}, \quad s\in\mathbb{R}$$
gegeben sind.

b) Geben Sie eine Lösung u dieser Wellengleichung an für den Fall, dass u_0 und v_0 durch
$$u_0(s) = e^{-s}, \quad s\in\mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad v_0(s) = e^{-s^2}, \quad s\in\mathbb{R}$$
gegeben sind. Falls Sie keine integralfreie Darstellung für u angeben können, verifizieren Sie, dass u die Wellengleichung erfüllt.

2 + 4 Punkte

Aufgabe 5. Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \qquad x \in (0,\,1) \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0, \end{cases}$$

wobei $c,\, f : [0,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind mit

$$c(x) > 0, \qquad x \in [0,\,1].$$

a) Nehmen Sie eine Finite-Differenzen-Diskretisierung für diese Differentialgleichung vor, wobei das Intervall $[0,\,1]$ äquidistant in 4 Teilintervalle zerlegt werden soll, und stellen Sie das diskrete System in der Form

$$A_h u_h = f_h$$

auf.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix A_h symmetrisch und positiv definit ist.

$1.5 + 1$ Punkte

Aufgabe 6. Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} u'(x) &= f(x), \qquad x \in (0,\,1) \\ u(0) &= g, \end{cases}$$

wobei $f : [0,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

a) Nehmen Sie eine Upwind-Diskretisierung für diese Differentialgleichung vor, wobei das Intervall $[0,\,1]$ äquidistant in 4 Teilintervalle zerlegt werden soll, und stellen Sie das diskrete System in der Form

$$A_h u_h = f_h$$

auf.

b) Zeigen Sie, dass $u_h \geq 0$ gilt, falls $f_h \geq 0$ gilt.

Hinweis: Welche Eigenschaft haben die Einträge von A_h^{-1}?

2 + 1 Punkte

Aufgabe 7. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Iterationsmatrix M des gedämpften Jacobi-Verfahrens mit Dämpfungsparameter $\tau = 1/2$ an und zeigen Sie, dass

$$\varrho(M) < 1$$

ist.

3 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit einer symmetrischen und positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einer rechten Seite $b \in \mathbb{R}^n$.

a) Dieses lineare Gleichungssystem ist äquivalent zu einem Minimierungsproblem

$$f(x) = \min_{\xi \in \mathbb{R}^n} f(\xi).$$

Geben Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ an und berechnen Sie ∇f.

b) Bei Verwendung des Gradienten-Verfahrens zur Approximation der Lösung des Minimierungsproblems aus Teil a) ist die Näherung x^{k+1} durch x^k, ∇f und einen Parameter τ_k bestimmt. Wie berechnet sich x^{k+1} aus diesen Größen?

c) Wie muss der Parameter τ_k aus Teil b) gewählt werden, um eine optimale Verbesserung der Näherung zu erreichen?

$2 + 2 + 2$ Punkte