Prof. Dr. Benjamin Stamm
Vertr.-Prof. Dr. Christian Rieger

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2018
Klausur | 27.03.2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 12. April 2019 von 11:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstraße 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	4	6	6	5	7	4	6	6	44
Ihre Punkte									

Klausur + Bonus = Gesamt

Note:

Aufgabe 1.
Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} (n/\sqrt{x})\ \sin(x/n), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\{f_n\} \subset L^1([0,1])$.

(b) Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert gegen die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Sinne der punktweisen Konvergenz und der

(c) gleichmäßigen Konvergenz.

(d) Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ konvergiert gegen f in $L^1([0,1])$.

Hinweis:

- $|\sin(t)| \leq |t|$.
- $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.

1+1+1+1 = 4 Punkte

Aufgabe 2.

Betrachten Sie die Fläche $F = \{x \in \mathbb{R} | x = \phi(s,t), (s,t) \in B\}$ mit

$$\phi(s,t) = \begin{pmatrix} s\cos t \\ s\sin t \\ t \end{pmatrix}, \qquad B = (1,2) \times (0, 2\pi).$$

a) Berechnen Sie die Länge des Randes von F.

b) Berechnen Sie die Fläche von F. Es reicht, wenn Sie die Formel auf ein eindimensionales bestimmtes Integral reduzieren.

c) Bestimmen Sie anhand des Satzes von Gauss das Randintegral

$$\int_{\partial F} G \cdot \nu dS$$

mit $G(x,y,z) = (1, 100, z\sqrt{x^2+y^2})$.

2+2+2=6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Betrachten Sie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = (2xy, x^2, 2z),$$

und berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma f \cdot dx$ mit

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), ht)^\top$$

und $h \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Arbeitsintegral auf zwei verschiendene Arten:

a) Mit der Definition

$$\int_\gamma f \cdot dx = \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

b) Zeigen Sie, dass f ein Potential $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt und benutzen Sie die Identität

$$\int_\gamma f \cdot dx = \phi(\gamma(2\pi)) - \phi(\gamma(0)).$$

3+3=6 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei das Funktional $F : D \to \mathbb{R}$ mit

$$F(u) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(u'(x))^2 + \frac{1}{2}(u(x))^2 + \frac{\alpha}{4}(u(x)-1)^4 \right) dx$$

und

$$D := \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

(a) Sei $v \in D$. Berechnen Sie die erste Variation von F im Punkt u in Richtung v.

(b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der die Extremalen von F genügen.

(c) Geben Sie für $\alpha = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung mit den durch D vorgegebenen Randbedingungen an.

(d) Für welche Werte von $\gamma \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$G_\gamma := \left\{ u \in C^0([a,b]) : \int_a^b u(x)dx = \gamma \right\}$$

konvex?

(e) Zeigen Sie, dass die Menge

$$G := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(x^2, (x-2)^2 + 2) \leq y \right\}$$

konvex ist.

1+1+1,5+1,5=5 Punkte

Aufgabe 5.

Sei $\vec{x} : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{x}'(t) = f(t, \vec{x}(t)), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0,$$

wobei $f \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ ist und $\partial_i f(t, \vec{x}) \leq M$, $i = 1, 2$ für alle $(t, \vec{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$. Sei $h = T/N$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $t_j = jh$ für $0 \leq j \leq N$.

a) Gegeben sei folgendes Runge-Kutta Verfahren

$$\vec{x}_{j+1} = \vec{x}_j + h\Psi(t_j, \vec{x}_j, h), \quad j = 0, \dots, N$$

mit der Verfahrensfunktion

$$\Psi(t, \vec{x}, h) = (1 - b)f(t, \vec{x}(t)) + bf(t + ch, \vec{x} + chf(t, \vec{x}(t))),$$

wobei $b, c \in \mathbb{R}$ sind. Geben Sie das Butcher-Tableau des Verfahrens an.

b) Definieren Sie den Begriff der Konsistenzordnung. Welche Konsistenzordnung hat das Verfahren maximal?

c) Geben Sie einen Wert für c an, so dass die Konsistenzordnung maximal wird. Begründen Sie Ihre Wahl.

d) Welche Konvergenzordnung des Verfahren erwarten Sie? Begründen Sie Ihre Erwartung.

1+2+2+2=7 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

Sei $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

wobei $f \in C^2([0, T] \times \mathbb{R})$ ist und $\partial_x f(t, x) \leq M$ für alle $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$. Sei $h = T/N$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $t_j = jh$ für $0 \leq j \leq N$.

a) Betrachten Sie die beiden Verfahren

$$x_{j+1} = x_j + hf(t_j, x_j)$$
$$x_{j+1} = x_j + hf(t_{j+1}, x_{j+1}).$$

Geben Sie die Verstärkungsfunktion beider Verfahren an.

b) Geben Sie die Stabilitätsgebiete beider Verfahren an und skizzieren Sie sie. Ist eines der Verfahren A-stabil?

c) Geben Sie die Definition eines linearen Mehrschrittverfahrens an. Welche Konsistenzordnung hat das Verfahren? Was gilt für die Konvergenzordnung?

$$x_{j+2} = x_j + 2hf(t_j, x_j)?$$

Begründen Sie Ihre Antwort. (Nehmen Sie hierzu an, daß x_1 genügend genau gegeben ist.)

1+1+2= 4 Punkte

Aufgabe 7.

a) Geben Sie Schätzungen für die Eigenwerte der Matrix mittels des Satzes von Gershgorin

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

an.

b) Zeigen Sie, dass $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|, \quad 1 \leq k \leq n$$

regulär ist.

c) Geben Sie ein Iterationsverfahren zur Bestimmung Eigenwertes mit absoluten kleinsten Betrag von B an.

2+2+2= 6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.
Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3.$$

a) Hat die Funktion f mindestens ein lokales/globales Minimum? Ist das Minimum global?

b) Gilt für $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$, dass

$$\vec{d}_k := -\nabla^2 f(\vec{x}_k) \nabla f(\vec{x}_k) \in \mathbb{R}^2$$

eine Abstiegsrichtung ist?

c) Wählen Sie $\vec{x}_0 = (2, 2)^\top$ und

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha_k \vec{d}_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie α_k, so dass es der Wolfe-Bedingung genügt. Konvergiert dann das obige Verfahren?

d) Definieren Sie die Menge

$$M := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|\vec{x}\|^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

und betrachten Sie

$$\vec{x}^\star := \arg\min_{\vec{x} \in M} f(\vec{x}).$$

Geben Sie die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen an.

1+1+2+2= 6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: