Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Matr.-Nr.: | | | | | |

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (CCES)

Klausur Mathematische Grundlagen III (CES)

23.08.2013

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **40%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 6.09.2013 von 13:30–15:00 Uhr im 1090| 328, Rogowski Gebäude, Schinkelstr. 2 statt. Ein Termin für eine mündliche Nachprüfung ist dort zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt" an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Bei Rücktritt von der Klausur *vor* Beginn der Klausur ist ein Attest notwendig. Bei Rücktritt *nach* Beginn der Klausur ist unverzüglich eine Ärztin oder ein Arzt aufzusuchen. Auf dem Attest müssen Befundtatsachen, Datum und genaue Uhrzeit aufgeführt werden. Das Attest ist unverzüglich beim zentralen Prüfungsamt (ZPA) einzureichen. Nach Weiterleitung an den zuständigen Prüfungsausschuss entscheidet dieser über die Anerkennung.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

NAME, VORNAME: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	7	7	5	9	5	6,5	4,5	50
Ihre Punkte									

Note:

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Funktional $J : D \to \mathbb{R}$ mit

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left((u'(x))^2 - (u(x))^2 \right) dx$$

und $D := \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.

(a) Sei $v \in D$. Berechnen Sie die erste Variation von F im Punkt u in Richtung v.

(b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der die Extremalen von J genügen.

(c) Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung mit den durch D vorgegebenen Randbedingungen an.

(d) Ist die Menge

$$G := \left\{ u \in C^0([a,b]) : \int_a^b u(x) dx = 0 \right\}$$

konvex?

2 + 1 + 1 + 2 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben sei die Funktion $f : [e, \infty) \to \mathbb{R}^+$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2},$$

wobei e die Eulersche Zahl ist. Zeigen Sie, dass $f \in L^p([e, \infty))$ gilt, genau dann, wenn $p \geq 1$ ist.

Hinweis:
Behandeln Sie die Fälle $p < 1$, $p = 1$ und $p > 1$ getrennt. Benutzen Sie

- $\ln(x) \geq 1$ für $x \geq e$ im Fall $p > 1$,
- die Ableitung $\frac{d}{dx} \frac{1}{\ln(x)}$ im Fall $p = 1$,
- für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $C > 0$ so dass $\ln(x) \leq C x^{\varepsilon}$ für alle $x \geq e$ im Fall $p < 1$.

7 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^4} \begin{pmatrix} \text{y} \\ \text{-x} \end{pmatrix}.$$

(a) Sei Γ der gegen den Uhrzeigersinn orientierte Rand der Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$, mit Anfangspunkt $(1,0)^T$. Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_\Gamma f \cdot ds.$$

(b) Besitzt f ein Potential?

(c) Berechnen Sie

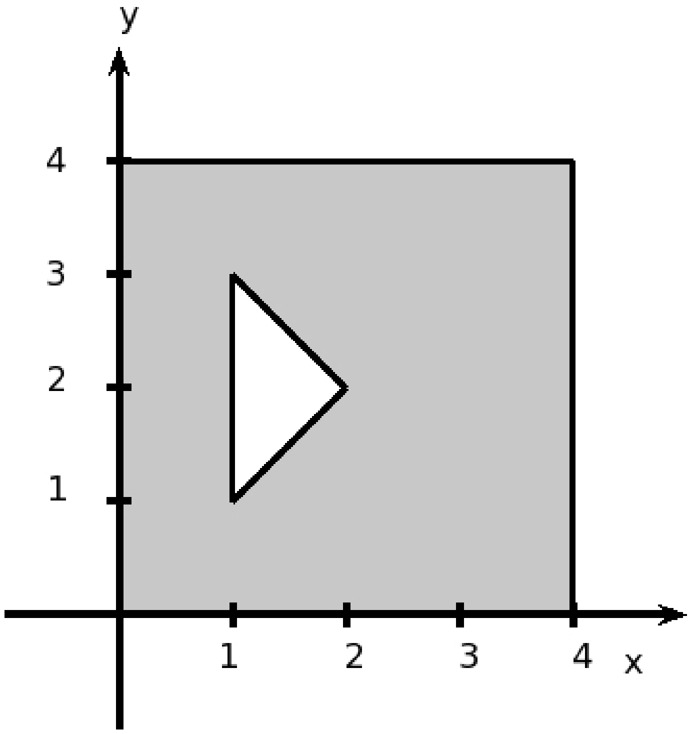
$$\operatorname{rot} f = \frac{\partial}{\partial x} f_y - \frac{\partial}{\partial y} f_x.$$

Steht das Ergebnis im Widerspruch zu Aufgabenteil (b)?

4 + 1 + 2 Punkte

Aufgabe 4.

Sei B die folgende Menge,



d.h. die Menge innerhalb des Quadrats $[0,4] \times [0,4]$ und außerhalb des Dreiecks mit Eckpunkten $(1,1), (2,2), (1,3)$.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos y + 3x \\ x \sin y + x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Arbeitsintegral über den Rand

$$\int_{\partial B} f \cdot ds$$

mit Hilfe eines Integralsatzes.

5 Punkte

Aufgabe 5.

Man betrachte das Einzelschrittverfahren

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{3}f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{2}{3}f(x_n, y_n)\right) \tag{1}$$

zur Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = f(x, y(x)), y(0) = y_0$.

(a) Definieren Sie den lokalen Entwicklungsfehler des Verfahrens (1) und schätzen Sie ihn ab.

(b) Zeigen Sie, dass der Entwicklungsfehler für das folgende Mehrschrittverfahren der Ordnung 3 in h ist.

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \frac{h}{2}\left(f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_{n-1}, y_{n-1})\right) \tag{2}$$

(c) Benennen Sie die Konsistenzbedingung eines linearen Mehrschrittverfahrens und überprüfen Sie diese für das Schema (2).

(d) Welche Aussagen bezüglich der Stabilität der beiden Verfahren (1) und (2) können Sie treffen? Begründen Sie Ihre Aussagen.

2,5 + 3,5 + 1 + 2 Punkte

Aufgabe 6.

Man betrachte die Differentialgleichung:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

Gegeben sei ein Einschrittverfahren mit

$$\phi(t, x, h) = af(t, x) + cf(t + bh, x + 3hf(t, x))$$

a) Geben Sie das Runge-Kutta Tableau für dieses Verfahren an. Ist das Verfahren explizit oder implizit?

b) Für welche Werte von (a, b, c) ist die Konsistenzordnung des Verfahrens mindestens 2? Bestimmen Sie (a, b, c) mittels Taylor-Entwicklung.

c) Existieren für Parameter (a, b, c) Werte, so dass das Schema mit der speziellen Flussfunktion $f(t, x) = t^2$ von dritter Ordnung ist?

1 + 2 + 2 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben seien die Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 27 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 14 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 10 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 6 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass für das Spektrum $\sigma(M)$ gilt:

$$\sigma(M) \subset \mathbb{R}$$

(b) Das Spektrum von M ist gegeben durch: $\sigma(M) = \{1, 6, 10, 14, 27, 28\}$. Zu welchem Eigenwert konvergiert eine inverse Vektoriteration nach Wielandt mit Näherungswert $\mu = \frac{9}{2}$ für einen geeigneten Startvektor x_0?

(c) Führen Sie eine Iteration der inversen Vektoriteration für die Matrix K und den Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus. Skizzieren Sie die Schritte der zweiten Iteration, d.h. geben Sie die nötigen Formeln an, ohne die zugehörigen Rechnungen auszuführen.

(d) Die Vektoriteration und das QR-Verfahren stellen zwei sehr wichtige Verfahren zur numerischen Berechnung von Eigenwerten dar. Diskutieren Sie knapp Vor- und Nachteile beider Verfahren.

2 + 1 + 2,5 + 1 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei die gestörte Matrix

$$A(\epsilon) = \begin{pmatrix} 4+\epsilon & -2\epsilon & 0 \\ \epsilon & -2 & -\epsilon \\ 3 & \epsilon - 3 & 1+\epsilon \end{pmatrix}$$

(a) Schätzen Sie die Eigenwerte der gestörten Matrix $A(\epsilon)$ mittels des Satzes von Bauer-Fike in Abhängigkeit von der Störung $\epsilon \in \mathbb{R}$ ab. Verwenden Sie hierfür die 1-Norm. Es existiert hierfür eine sinnvolle Dekomposition $A(\epsilon) = M + S(\epsilon)$ für die die Matrix $D = T^{-1}MT$ mit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist. Nutzen Sie diese Dekomposition.

(b) Nutzen Sie die Abschätzung

$$\sigma(A(\epsilon)) \subseteq \{x : |x+2| \leq 12|\epsilon|\} \cup \{x : |x-1| \leq 12|\epsilon|\} \cup \{x : |x-4| \leq 12|\epsilon|\}$$

um ϵ möglichst allgemein zu bestimmen, so dass $A(\epsilon)$ auf jeden Fall invertierbar ist.

2,5 + 2 Punkte