Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Benjamin Stamm

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | SS 2019
Klausur | 13.08.2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 27.08.2019 von 10:00–12:00 Uhr im 1090|328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
Punkte	3	3	5	4	4	5.5	5	5.5	4	5	2.5	2.5	4.5	5.5	59
Ihre Punkte															

Klausur ______ + Bonus ______ = Gesamt ______

Note: ______

Aufgabe 1.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben sind die folgenden komplexen Zahlen

$$z_1 = 2 + i$$
$$z_2 = 3 - 2i$$
$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(\bar{z}_3)^4$

b) $|\frac{2z_2+z_1-5-i}{2z_1-z_2+3-i}|^2$

1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n c^n,$$

wobei $0 < c < 1$.

a) Beweisen Sie anhand des ε-Kriteriums, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und geben Sie den Grenzwert an.

b) Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Konvergiert die Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

an. Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Zeigen Sie anhand der Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k,$$

dass

$$\exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(a+b).$$

1.5+1+1+1.5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind.

b) Seien

$$A_2 := \{x \in \mathbb{Q} : \, x^2 < 2\}$$
$$A_4 := \{x \in \mathbb{Q} : \, x^2 < 4\}.$$

i) Zeigen Sie, dass A_2 bzw. A_4 nach oben beschränkt sind.

ii) Existiert für A_2 bzw. A_4 eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$? Seien Sie bei Ihrer Antwort präzise.

1+(0.5+2.5) Punkte

Aufgabe 5.

a) Zeigen Sie anhand des ϵ-δ Kriterium, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

in jedem Punkt stetig ist.

b) Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{4n}\right)^{2n}$$
$$b_n = \frac{2n^2 + 2n^{(-2)}}{3n^2 + 3n^{(-2)}}.$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

1.5+2.5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

a) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = |x|$$
auf dem Intervall $(-1, 1)$ Lipschitz stetig und/oder differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Leiten Sie die Taylorentwicklung von $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \ln(x + 1)$$
zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ her. Benutzen Sie dabei das Prinzip der vollständigen Induktion um $f^{(k)}(x)$ für alle $k \geq 1$ zu bestimmen.

c) Sei $a < b$. Zeigen Sie, dass es für jede stetige Funktion f auf $[a, b]$, welche auf (a, b) differenzierbar ist, ein Punkt $x \in [a, b]$ existiert, sodass
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b + a}{2x} f'(x).$$

1.5+2.5+1.5 Punkte

Aufgabe 7.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sin(x^2 - 1)$.

a) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Grades $T_2(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

b) Sei $I = [0, 2]$. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Schranke für den Fehler auf I

$$\max_{x \in I} |f(x) - T_2(x)|.$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to (-1)} \frac{\sin(x+1)(x+1)}{x^2 - 1}.$$

2+2+1 Punkte

Aufgabe 8.

Berechnen Sie die Integrale

a) $\int \exp(x)\sin(x)\,dx$

b) $\int_0^1 x^3 \exp(-x^4)dx$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-2\sqrt{t})dt$

1.5+1.5+2.5 Punkte

Aufgabe 9.

Gegeben sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 5x_3 - 3x_2 + x_1 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 \\ x_3 + \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix zur Abbildung ϕ an und bestimmen Sie deren Rang.

b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der Abbildung.

2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 10.

Sei $F := \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum bezüglich der üblichen Vernküpfungen (Addition und Skalarmultiplikation). Man untersuche, ob die folgenden Teilmengen von F Unterräume sind:

a) $A := \{f \in F | f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

b) $B := \{f \in F | f(7) = f(1)\}$

c) $C := \{f \in F | f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

d) $D := \{f \in F | f \text{ ist bijektiv}\}$

1+1.5+1.5+1 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben seien folgende Matrizen, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 99 & 5 & 2a \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie jeweils die Determinante von A und geben Sie an, wann die Matrix regulär bzw. singulär ist.

Hinweis:

In Aufgabenteil b) bietet es sich an den Laplaceschen Entwicklungssatz anzuwenden: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann gilt

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ wobei } A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

1+1.5 Punkte

Aufgabe 12.

Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und der Unterraum

$$U = \mathsf{span}\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Bestimmen Sie die Bestapproximation v_3 in U, also $u^* \in U$ mit

$$\|u^* - v_3\|_2 = \min_{u \in U} \|u - v_3\|_2.$$

2.5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 13.

a) Für welche $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ hat das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & 0 \\ a & 2 & \frac{1}{a} \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=b}.$$

keine, genau eine, mehr als eine Lösung? Charakterisieren Sie den Lösungsraum für alle Möglichkeiten.

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:=\tilde{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=\tilde{b}}$$

keine, genau eine, mehr als eine Lösung? Charakterisieren Sie den Lösungsraum für alle Möglichkeiten.

2.5+2 Punkte

Aufgabe 14.

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist die Matrix B diagonalisierbar?

Hinweis: 3 ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Matrix B.

5.5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: