Aufgabe 1. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

3 Punkte

Aufgabe 2. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2n^3+1)}}$$ (b) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k-1}}{3^k}$$

Bestimmen Sie im Teil (b) zusätzlich den Wert der Reihe, falls er existiert.

3 Punkte

Aufgabe 3. Sei (f_n) die Funktionenfolge, die durch $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} \quad \text{für alle } x \in [-1,1]$$

gegeben ist.

(a) Untersuchen Sie (f_n) auf punktweise Konvergenz gegen eine Funktion f. Berechnen Sie f, falls punktweise Konvergenz vorliegt.

(b) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit im Intervall $[-1,1]$.

(c) Konvergiert (f_n) gleichmäßig auf $[-1,1]$ gegen f?

4 Punkte

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $f(x) := \operatorname{arccot} x$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

(b) Ist f auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig?

(c) Ist f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?

5 Punkte

Aufgabe 5. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Hinweis: Substituieren Sie $x = 2\sin y$.

3 Punkte

Aufgabe 6. Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $u(x) := \int\limits_{x-1}^{x+1} v(s)\, ds$ für $x > 1$.

(a) Zeigen Sie, dass u stetig differenzierbar ist.

(b) Weiterhin sei v 2-periodisch, d.h. $v(x+2) = v(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass u konstant ist.

3 Punkte

Aufgabe 7. (a) Sei $n \geq 1$, $X := \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_X$ eine Norm auf X und $Y := \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\|y\|_Y := \sup_{\xi \in X : \|\xi\|_X = 1} \xi^T y \qquad \text{für alle } y \in Y$$

eine Norm auf Y definiert.

(b) Sei $V := \mathbb{R}^n$ ausgestattet mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ und $Q \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, d.h. $Q^\top = Q^{-1}$. Weiterhin definiert man $\|Q\|_2 := \|Q\|_{V \to V}$ und $\kappa_2(Q) := \|Q\|_2 \|Q^{-1}\|_2$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\kappa_2(Q) = 1.$$

4 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Konditionszahl von A bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ auf $\mathbb{R}^3$.

(b) Die rechte Seite b werde durch

$$\Delta b = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

gestört, d.h. es gelte $Ax = b$ bzw. $A\widetilde{x} = b + \Delta b$ mit eindeutigem x bzw. $\widetilde{x}$. Geben Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler der Lösung an und begründen Sie diese.

Hinweis: Es gilt: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -7 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

4 Punkte

Aufgabe 9. Betrachten Sie die Auswertung des Ausdruckes

$$y = \frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x}$$

an der Stelle $x = 10^{-5}$.

(a) Welches Phänomen erwarten Sie?

(b) Bringen Sie den Ausdruck auf eine numerisch stabilere Form.

(c) Berechnen Sie die relative Kondition des Problems.

(d) Schätzen Sie ab, wie genau (in %) $x \in (0, 1)$ bekannt sein muss, damit sich y auf 1% genau berechnen lässt.

2,5 Punkte + 1,5 Bonuspunkte