Prof. Dr. Benjamin Stamm
Hassan Muhammad, M. Sc.
Andreas Smolenko, M. Sc.

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Analysis für Informatiker | WS 2017/18
Klausur | 08.02.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners oder Formelzettel, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 15.02.2018 von 16:00–19:00 Uhr im 1090|334, klPhys (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
Punkte	6	6,5	8	5	4	4	14	4,5	5	10	8	7	11	7	100
Ihre Punkte															

Note:

Aufgabe 1.

Punkte

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

"Die Zahl $7^n - 2^n$ ist durch 5 teilbar".

Schreiben Sie klar und eindeutig die Aussage hin, die Sie zeigen möchten. Stellen Sie jeden Induktionsschritt ((IA),(IV),(IS)) eindeutig und separiert dar.

6 Punkte

Aufgabe 2.

Punkte

a) Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $2x - 1 - iy = 1 - i$?

b) Bestimmen Sie den Betrag von $z = \frac{(10-8i)(-1+i)}{(4+2i)(2-3i)} \in \mathbb{C}$.

c) Bestimmen Sie die Menge M aller $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x \in \mathbb{R}^*$ und $y \in \mathbb{R}$ für die $\mathrm{Im}(z^2 - i) > 0$ gilt und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der komplexen Zahlenebene.

1,5+1+4 Punkte

Aufgabe 3.

Punkte

a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+10}-n}{n-3}$$

der reellen Folge $(a_n)_{n\geq 4}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Begründen Sie Ihre Antwort indem Sie Ihre Zwischenschritte erläutern.

b) Seien $b_1 = 1$ und $b_{n+1} = \sqrt{b_n + 1}$ für alle $n \geq 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Berechnen Sie den Grenzwert

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

unter der Annahme, dass die reelle Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert. Es gelte dabei $b \in \mathbb{R}$.

3,5+4,5 Punkte

Aufgabe 4.

Punkte

Sei $(c_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Folge nur einen Grenzwert besitzt (Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt). Nutzen Sie das ε-n-Kriterium zur Bestimmung des Grenzwerts.

5 Punkte

Aufgabe 5.

Punkte

Zeigen Sie, dass die reelle Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\geq 1}$ mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

4 Punkte

Aufgabe 6.

Punkte

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ zwei positive reelle Folgen. Seien die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

konvergent. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}$$

somit ebenfalls konvergiert.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\sqrt{a_k b_k} < a_k + b_k$ gilt.

4 Punkte

Aufgabe 7.

Punkte

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ gegeben.

i) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ gilt, wobei Sie annehmen können, dass ∞ ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}$ ist.

ii) Zeigen Sie mittels ε-δ-Kriterium, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ gilt.

iii) Zeigen Sie unter Verwendung des ε-δ-Kriteriums die Stetigkeit von f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

3+4+7 Punkte

Aufgabe 8.

Punkte

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

Ist g stetig in $x_0 = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4,5 Punkte

Aufgabe 9.

Punkte

Zeigen Sie anhand des Zwischenwertsatzes, dass eine stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ einen Fixpunkt $x_0 \in [0,1]$, d. h. $f(x_0) = x_0$, besitzt.

5 Punkte

Aufgabe 10.

Punkte

Gegeben sei die stetige und differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \sin(\ln(1 + x^2)).$$

Sie dürfen annehmen, dass die erste Ableitung dieser Funktion $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch auf dem Definitionsbereich differenzierbar ist.

i) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von g.

ii) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maximal- und Minimalstellen und alle lokalen und globalen Maxima und Minima.

3+7 Punkte

Aufgabe 11.

Punkte

a) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos(2x) dx.$$

Nutzen Sie Integrationsregeln, um die Stammfunktion zu bestimmen. Sie müssen nicht überprüfen, dass der Integrand integrierbar ist.

b) Untersuchen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende uneigentliche Integral existiert

$$\int_0^1 x^\alpha dx$$

und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert dieses Integrals.

4+4 Punkte

Aufgabe 12.

	Punkte

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix D_f (erste Ableitung) von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (x^2 + 2y)^3 \\ \exp(x - z) \end{pmatrix}$.

b) Geben Sie die Funktionsvorschrift der Verknüpfung $h = g \circ f$ mit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(s, t) = s + t$ an.

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von h im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3+1+3 Punkte

Aufgabe 13.

Punkte

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung für (x, y) gegeben durch

$$y(\exp(x) - x) + x(\exp(y) - 1) = 0$$

im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ lokal nach y aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix (erste Ableitung) der lokalen Lösung in der Umgebung vom Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

c) Ist die Gleichung in der Umgebung von $(x_0, y_0) = (0, 0)$ auch nach x auflösbar?

5,5+2+3,5 Punkte

Aufgabe 14.

Punkte

Sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{1}{x \cdot y(x)}$$

unter der Anfangsbedingung $x_0 = e$ und $y(x_0) = y(e) = 1$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösung φ dieses Anfangswertproblems mit $\varphi : (\sqrt{e}, \infty) \to \mathbb{R}_+^*$ und $\varphi(e) = 1$.

7 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: