

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

2

Aufgabe 1. Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Finden Sie eine untere Schranke $s \in \mathbb{R}_+$ für (a_n) . Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass (a_n) den Abschätzungen

$$s < a_n < 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

genügt.

- (b) Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend ist. Zeigen weiterhin Sie, dass (a_n) eine in \mathbb{R} konvergente Folge ist und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend und stetig in $[0, \infty)$. Um eine untere Schranke s für (a_n) zu finden, berechnet man einige der ersten Folgenglieder.

5 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

3

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

4

Aufgabe 2. Prüfen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 5x},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x + 2|}{2x + 4}.$$

4 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

5

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

6

Aufgabe 3. (a) Sei $x \in (-1, 1)$ beliebig. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1+x^{2n})}$$

auf Konvergenz.

(b) Geben Sie $(-1 + i)^6$ in Polarkoordinatendarstellung $re^{i\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ an.

4 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

7

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

8

Aufgabe 4. Die Temperaturverteilung eines dünnen Metallrings entlang seines Umfangs kann als stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(2\pi)$ aufgefasst werden. Zeigen Sie, dass es immer zwei entgegengesetzte Punkte auf dem Ring gibt, die exakt die gleiche Temperatur haben.

Hierbei gilt: Der zu $x_0 \in [0, \pi]$ entgegengesetzte Punkt ist $x_0 + \pi$.

Hinweis: Betrachten Sie $F(x) := f(x) - f(x + \pi)$ auf $[0, \pi]$.

3 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

9

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

10

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

auf \mathbb{R} differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

3 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

11

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

12

Aufgabe 6. Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

3 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

13

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

14

Aufgabe 7. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zweiten Grades zur Wertetabelle

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
f_i	0	1	3

- (a) in der Darstellung durch die Lagrange-Basispolynome,
- (b) in der Darstellung durch die Monom-Basis,
- (c) in der Darstellung durch die Newton-Basis.

3 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

15

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

16

Aufgabe 8. Seien $a, b \in [0, \pi/2]$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x$. Geben Sie eine Abschätzung der Form

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(f|a, b)(x)| \leq C(b - a)^k$$

an, wobei die zu bestimmenden Konstanten $C \in [0, \frac{1}{8}]$ und $k \in \mathbb{N}$ nicht von a, b abhängen und k möglichst groß ist.

Hinweis: Auftretende Ableitungen von f können durch von a, b unabhängige Konstanten abgeschätzt werden.

2 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

17

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

18

Aufgabe 9. Zur Auswertung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := 1 - \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

sei der Algorithmus

$$y_0 := x^2, \quad y_1 := y_0 + 1, \quad y_2 := \frac{y_0}{y_1}, \quad y_3 := 1 - y_2$$

gegeben.

- (a) Bestimmen Sie die relative Kondition des Problems für alle $x \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob das Problem gut konditioniert ist und begründen Sie dies.
- (b) Ist der angegebene Algorithmus für alle $x \in \mathbb{R}$ stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie gegebenenfalls einen stabilen Algorithmus an.

3 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

19

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

20

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

21

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

22

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

23

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

24