Mathematische Grundlagen V (CES) | SS 2017
Musterlösung Klausur | 14.08.2017

Aufgabe 1.
Betrachten Sie folgende Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche davon sind schwach differenzierbar? Berechnen Sie die schwache Ableitung, falls diese existiert. Welche der Funktionen sind Elemente von $H^1(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)
$$u(x) = 1 - |x|$$

b)
$$u(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & -1 < x < 0, \\ (x-1)^2, & 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

c)
$$u(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 0, \\ (x-1)^2 + 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

2+2+2 Punkte

Lösung.
Eine Funktion $u \in L^1(\Omega)$ ist einfach schwach differenzierbar, wenn eine Funtion $w \in L^1(\Omega)$ existiert so, dass
$$\int_\Omega u\phi^1 \, dx = (-1) \int_\Omega w\phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$
gilt, wobei ϕ^1 die erste Ableitung bezeichne $\phi^1 = \partial_x \phi$. Die Testfunktion ϕ sei aus dem Raum C_0^∞.

a)
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u \, \phi^1 \, dx &= \int_{-\infty}^{0} (x+1)\phi^1(x) \, dx + \int_0^\infty (1-x)\phi^1(x) \, dx \\
&\overset{PI}{=} (x+1)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 1\phi(x) \, dx \\
&\quad + (1-x)\phi(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 1\phi(x) \, dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} 1\phi(x) \, dx + \int_0^\infty 1 \, \phi(x) \, dx.
\end{aligned}$$

Somit ist die gesuchte Funktion $w(x)$ gegeben durch
$$w(x) := \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

Allerdings ist $u \notin L^1(\mathbb{R})$ und daher nicht schwach differenzierbar.

1 Punkt

Der Sobolevraum ist definiert durch:

$$H^1(\mathbb{R}) = W^{1,2}(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f^1 \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Die Funktion u ist kein Element des Sobolevraums, da das Integral $\int\limits_2^\infty 1 \; dx$ nicht endlich ist.

1 Punkt

b)

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} u \; \phi^1 \; dx &= \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} 0 \; dx + \int\limits_{-1}^{0} (x+1)^2 \phi^1(x) \; dx + \int\limits_{0}^{1} (x-1)^2 \phi^1(x) \; dx \\
&\overset{PI}{=} (x+1)^2\phi(x)\Big|_{-1}^{0} - \int\limits_{-1}^{0} 2(x+1)\phi(x) \; dx \\
&\quad + (x-1)^2\phi(x)\Big|_{0}^{1} - \int\limits_{0}^{1} 2(x-1)\phi(x) \; dx \\
&= -\int\limits_{-1}^{0} 2(x+1)\phi(x) \; dx - \int\limits_{0}^{1} 2(x-1)\phi(x) \; dx.
\end{aligned}$$

Somit ist die gesuchte Funktion $w(x)$ gegeben durch

$$w(x) := \begin{cases} 2\;(x+1), & -1 < x < 0, \\ 2\;(x-1), & 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und die Funktion u ist insbesondere schwach differenzierbar.

1 Punkt

Die Integrale $\int\limits_{-1}^{1} |u|^2 \; dx$ und $\int\limits_{-1}^{1} |w|^2 \; dx$ existieren, da der Integrand als ein Polynom Lebesgue integrierbar ist und die Menge $\Omega = (-1,1)$ endlich. Somit ist die Funktion ein Element von $H^1(\mathbb{R})$

1 Punkt

c)

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} u \; \phi^1 \; dx &= \int\limits_{-\infty}^{0} (x+1)^2 \phi^1(x) \; dx + \int\limits_{0}^{\infty} ((x-1)^2+1) \phi^1(x) \; dx \\
&\overset{PI}{=} (x+1)^2\phi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int\limits_{-\infty}^{0} 2(x+1)\phi(x) \; dx \\
&\quad + ((x-1)^2+1)\phi(x)\Big|_{0}^{\infty} - \int\limits_{0}^{\infty} 2(x-1)\phi(x) \; dx \\
&= -\phi(0) - \int\limits_{-\infty}^{0} 2(x+1)\phi(x) \; dx - \int\limits_{0}^{\infty} 2(x-1)\phi(x) \; dx.
\end{aligned}$$

1 Punkt

Wir möchten zeigen, dass die Funktion u nicht schwach differenzierbar ist. Daher führen wir ein Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, dass eine schwache Ableitung $w(x)$ existiert. Wir betrachten eine Folge von stetigen Funktionen $\{\phi_m\}_m^\infty$ mit den Eigenschaften:

$$0 \leq \phi_m(x) \leq 1, \ \lim_{m\to\infty} \phi_m(0) = 1, \ \lim_{m\to\infty} \phi_m(x) = 0, \ \forall x \neq 0.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} w(x)\phi_m(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x)\phi_m^1(x)\,dx \\
\iff &\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} w(x)\phi_m(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} -\phi_m(0) - \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{0} 2(x+1)\phi_m(x)\,dx \\
&\qquad - \lim_{m\to\infty} \int_{0}^{\infty} 2(x-1)\phi_m(x)\,dx \\
\iff &\ 0 = -1 + 0 + 0
\end{aligned}$$

Folglich haben wir einen Widerspruch und wir können folgern, dass die schwache Ableitung nicht existiert und somit u nicht element von $H^1(\mathbb{R})$.
Alternativ: Verweis auf $\delta-$Distribution.

1 Punkt

Aufgabe 2.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt. Betrachtet wird das Randwertproblem

$$\begin{aligned}
-\Delta u + \alpha u = f \quad &\text{in } \Omega, \\
u = 0 \quad &\text{auf } \partial\Omega,
\end{aligned}$$

mit $u \in H^1(\Omega)$ sowie $f \in L^2(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

(a) Leiten Sie die schwache Formulierung des obigen Problems her.

(b) Leiten Sie die Bilinearform her, die aus dem Randwertproblem resultiert. Zeigen Sie, dass diese koerziv in der $H^1(\Omega)$-Norm ist.

2+2 Punkte

Lösung.
(a) Mutliplying the given differential equation by $v(x) \in H^1(\Omega)$ and itegrating over the domain Ω, we get

$$-\int_\Omega v\Delta u dx + \int_\Omega \alpha uv dx = \int_\Omega f v dx$$

Integrating by parts, we get

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v dx + \int_\Omega \alpha uv dx = \int_\Omega f v dx \\
&\implies \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - 0 + \int_\Omega \alpha uv dx = \int_\Omega f v dx
\end{aligned}$$

1 Punkt

The weak formulation of the given problem can be given as:

Find $u \in H^1(\Omega)$ such that

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

where

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \alpha u v dx \\ F(v) &= \int_\Omega f v dx \end{aligned}$$

1 Punkt

(b) We now look at the coercive property.

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \alpha v v dx \\ &= \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \alpha \int_\Omega |v|^2 \, dx \\ &\geq \gamma \|v\|_H^2 \end{aligned}$$

where $\gamma = min\{1, \alpha\}$. Therefore the bilinear form is coercive for all $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

2 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Dreieck T mit den Eckpunkten $(0,0),\ (1,2),\ (4,0)$, sowie das Referenzdreieck $\hat{T}$ mit den Eckpunkten $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$. Auf dem Referenzdreieck sei die Quadraturformel

$$\int\limits_{\hat{T}} \hat{f}(\hat{x})\ d\hat{x} \approx \frac{1}{6}\left(\hat{f}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)+\hat{f}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)+\hat{f}\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)\right)$$

gegeben. Approximieren Sie mit Hilfe dieser Quadraturformel das Integral $\int\limits_T f(x)\ dx$ mit $f(x_1,x_2)=x_1x_2$, indem Sie

a) eine lineare Abbildung $F:\hat{T}\to T$ bestimmen und dann

b) das Integral über T auf ein Integral über $\hat{T}$ transformieren und berechnen.

c) Wird in Teil b) das Integral exakt berechnet?

2+2+1 Punkte

Lösung.

a) Wir suchen eine lineare Abbildung $F:\hat{T}\to T$ von der Form

$$F(\hat{x},\hat{y})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}.$$

1 Punkt

Durch einsetzen erhalten wir:

$$F(1,0)\stackrel{!}{=}(1,2)\Rightarrow a_{11}=1,\quad a_{21}=2,$$
$$F(0,1)\stackrel{!}{=}(4,0)\Rightarrow a_{12}=4,\quad a_{22}=0.$$

1 Punkt

b) Die Transformationsformel lautet:

$$\int\limits_T f(x)\ dx=\int\limits_{\hat{T}}\underbrace{f(F(\hat{x}))\ |det(DF(\hat{x}))|}_{=\hat{f}}\ d\hat{x}$$

1 Punkt

in unserem Fall haben wir:

$$|det(DF(\hat{x}))|=|-8|=8,\quad f(F(\hat{x}))=(\ \hat{x}_1+4\ \hat{x}_2)(2\hat{x}_1+0).$$

Somit gilt:

$$\int_{\hat{T}}\hat{f}(\hat{x})d\hat{x}\approx 8\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\frac{2}{6}+\frac{8}{6}\frac{8}{6}+\frac{17}{6}\frac{2}{6}\right)=\frac{24}{6}=4$$

1 Punkt

c) Das Integral in b) ist exakt, da die gegebene Quadraturformel die Gaus Quadraturformel zweiter Ordnung für das Einheitsdreieck ist, und unsere Funktion $f(F(\hat{x}))$ zweiter Ordnung in $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ ist.

1 Punkt

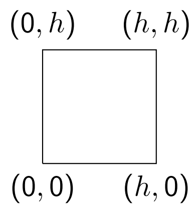
Aufgabe 4.

In 2D betrachten wir ein Gitter, bestehend aus achsenparallelen Quadraten der Seitelänge h. Auf jedem Quadrat sei die Ansatzfunktion gegeben durch

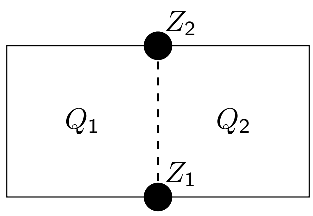
$$p(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy,$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y \in \mathbb{R}$.
Als Freiheitsgrade definieren wir die Werte der Ansatzfunktion auf den Ecken des Quadrates.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei den Freiheitsgraden um eine Familie unisolventer Funktionale handelt, d.h. aus den vier Funktionswerten an den Ecken lässt sich eindeutig eine Ansatzfunktion für das folgende Quadrat bestimmen.



(b) Wir wollen nun zeigen, dass der so aufgespannte Finite Elemente Raum aus stetigen Funktionen besteht. Betrachten Sie dazu zwei benachbarte Quadrate Q_1 und Q_2 mit Ansatzfunktionen, deren Funktionswerte auf den Endpunkten Z_1 und Z_2 der gemeinsamen Kante gleich sind. Zeigen Sie, dass die beiden Ansatzfunktionen auf der gesamten Kante übereinstimmen.



2.5 + 2.5 Punkte

Lösung.

Wir setzen das Koordinatensystem so, dass es sich die Seiten der Quadrate konstanten x bzw. y Werten entsprechen.

(a) Wir betrachten ein Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(h, 0)$, $(0, h)$, sowie (h, h).

Die Funktionswerte auf den Ecken sind gegeben durch z_0, z_1, z_2, z_3. Wir stellen das Gleichungssystem für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf um zu zeigen, dass die Determinante nicht null ist und alle Koeffizienten somit eindeutig durch die vier Ecken bestimmt sind. Das Gleichungssystem ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h & 0 \\ 1 & h & h & h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

1 Punkt

Das System ist offensichtlich eindeutig lösbar.

Es gilt: $\alpha = z_0$, $\beta = (z_1 - z_0)/h$, $\gamma = (z_2 - z_0)/h$, $\delta = (z_3 - z_1 - z_2 + z_0)/h^2$.

1 Punkt

Wir sehen, dass die Ansatzfunktion eindeutig durch alle 4 Eckwerte definiert ist.

0,5 Punkte

(b) Betrachte die folgende Situation, dass sich zwei Quadrate Q_1 und Q_2 eine Kante teilen, welche definiert ist durch die Eckpunkte Z_1, Z_2 und die jeweiligen Werte der Eckpunkte z_1, z_2.

Per Konstruktion gilt für beide Ansatzfunktionen p_1 und p_2, dass sie ausgewertet an einem Eckpunkt (Z_1 oder Z_2) den vorgegebenen Wert einnehmen (z_1, z_2). Somit gilt $p_1(Z_1) = p_2(Z_1)$ und $p_1(Z_2) = p_2(Z_2)$.

1 Punkt

Entlang der Kante Z_1-Z_2 ist x konstant und somit sind p_1 und p_2 ausgewertet auf der Kante nur Funktionen von y.

0,5 Punkte

Da p_1 und p_2 linear in y (und auch in x) sind und p_1 und p_2 auf zwei verschiedenen Punkten der Kante übereinstimmen, müssen sie in jedem Punkt der Kante übereinstimmen.

1 Punkt

Aufgabe 5.
Gegeben sei das Riemann-Problem

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0,$$
$$u(0, x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Geben Sie die Rankine-Hugoniot Bedingung für die obige Gleichung an.

b) Geben Sie ein Entropie-Entropiefluss-Paar für das obige Riemann-Problem an.

c) Bestimmen Sie eine Entropielösung des obigen Problems zum Zeitpunkt $t = 1/2$ und skizzieren Sie diese. Skizzieren Sie zusätzlich die Charakteristiken.

1+1+1 Punkte

Lösung.

a) Let u_l and u_r represent the state to the left and to the right of a discontinuity then the Rankine-Hugoniot conditions reads

$$\frac{(u_l^2 - u_r^2)}{2} = s(u_l - u_r) \Rightarrow s = \frac{(u_l + u_r)}{2}$$

where s represents the speed of propagation of the discontinuity.

1 Punkt

b) Wir suchen η und Ψ konvex, so dass $\eta(u)_t + \Psi(u)_x = 0$. In unserem Fall ist so ein Paar gegeben durch $\eta(u) = u^2$ und $\Psi(u) = \frac{2}{3}u^3$.

1 Punkt

c) Die Schockgeschwindigkeit ist gegeben durch $s = 1/2$. Eine schwache Lösung ist damit gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, x < st \\ 0, x \geq st \end{cases}$$

1 Punkt

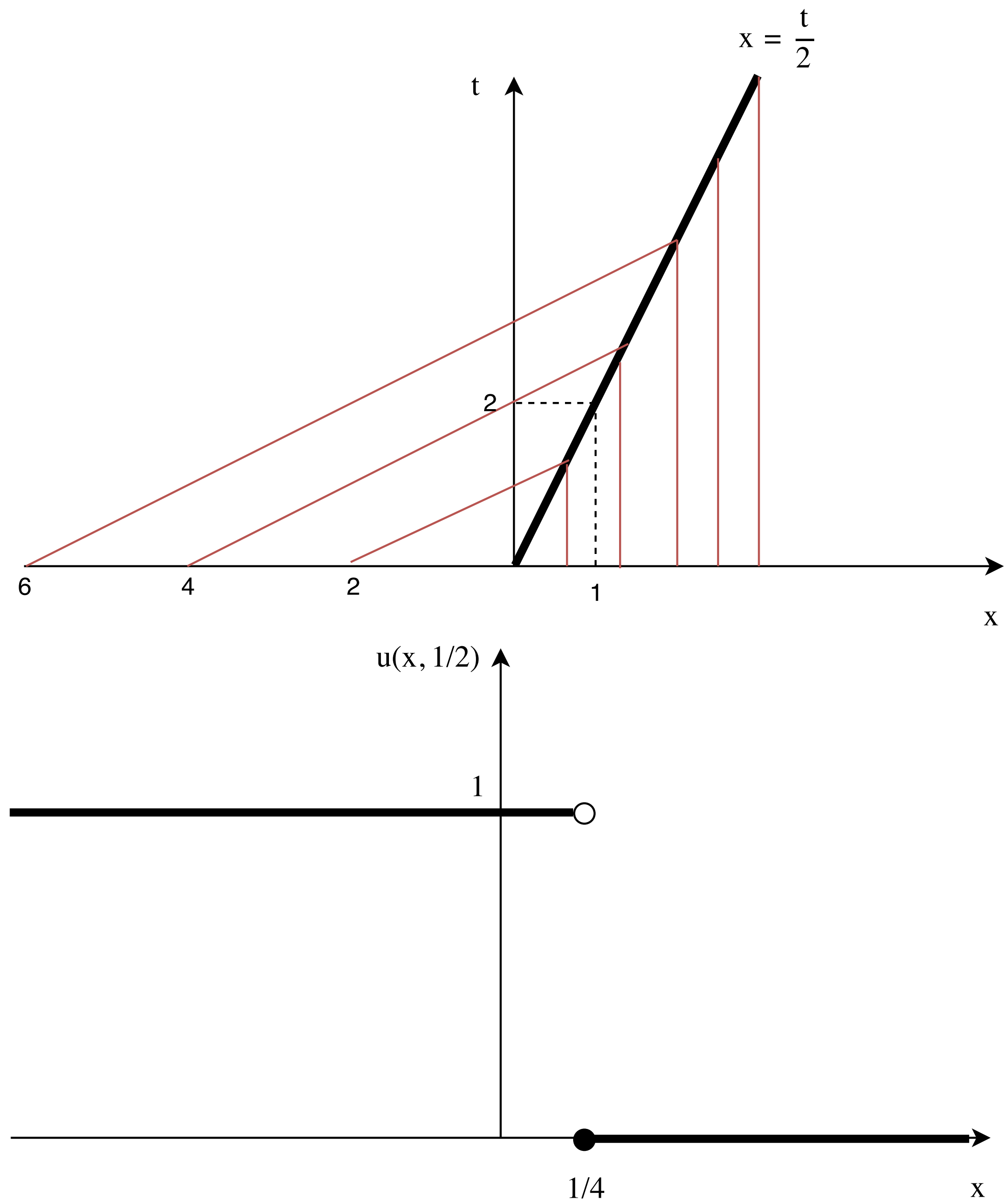


Abbildung 1: Charecteristic lines and solution u at time $t = 1/2$.

Aufgabe 6.

Gegeben sei das System partieller Differentialgleichungen

$$\partial_t U(t,x) + A\partial_x U(t,x) = 0,$$

mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ und Anfangsbedingung

$$U(0,x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, & x < 0, \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, & x > 0. \end{cases}$$

a) Diagonalisieren Sie das System und die Anfangsbedingung, so dass Sie zwei skalare Differentialgleichungen erhalten. Berechnen Sie dazu T und Λ, so dass $A = T\Lambda T^{-1}$

mit Diagonalmatrix Λ und führen Sie anschließend eine geeignete Variablentransformation durch.

b) Lösen Sie die skalaren Diferentialgleichungen mit den entsprechenden Anfangsbedingungen.

c) Transformieren Sie die Lösung zurück und geben Sie die Lösung für $U(t,x)$ an.

3+1.5+2.5 Punkte

Lösung.

a) Die Matrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$, sowie die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0.5+0.5 Punkte

Für die Transformation $A = T\Lambda T^{-1}$ gilt dann

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

0.5+0.5+0.5 Punkte

Definiere nun $W = T^{-1}U$ mit $W(t,x) = \begin{pmatrix} w_1(t,x) \\ w_2(t,x) \end{pmatrix}$.

Daraus ergibt sich die Anfangsbedingung

$$W(0,x) = T^{-1}U(0,x) \begin{cases} \begin{pmatrix} 8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}, & x < 0, \\ \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}, & x > 0. \end{cases}$$

also

$$w_1(0,x) = w_{1,0}(x) = \begin{cases} 8/5, & x < 0, \\ 4/5, & x > 0, \end{cases} \quad \text{sowie} \quad w_2(0,x) = w_{2,0}(x) = \begin{cases} 4/5, & x < 0, \\ -3/5, & x > 0, \end{cases}$$

0.5 Punkte

b) Für die **Lösung** der skalaren linearen Transportgleichungen ergibt sich dann allgemein

$$w(x,t) = w_0(x - \lambda t),$$

0.5 Punkte

also konkret

$$w_1(x,t) = w_{1,0}(x - \lambda_1 t) = w_{1,0}(x - 3t) = \begin{cases} 8/5, & x < 3t, \\ 4/5, & x > 3t, \end{cases}$$

0.5 Punkte

und analog

$$w_2(x,t) = w_{2,0}(x - \lambda_2 t) = w_{2,0}(x + 2\,t) = \begin{cases} 4/5, & x < -2t, \\ -3/5, & x > -2t. \end{cases}$$

0.5 Punkte

c) Für die **Rücktransformation** gilt

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} w_1(x,t) \\ w_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(x,t) - 2\,w_2(x,t) \\ 2w_1(x,t) + w_2(x,t) \end{pmatrix}.$$

0.5 Punkte

Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \begin{cases} 8/5, & x < 3t, \\ 4/5, & x > 3t \end{cases} - \begin{cases} 8/5, & x < -2\,t, \\ -6/5, & x > -2\,t \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & x < -2t, \\ 14/5, & -2t < x < 3t, \\ 2, & x > 3t. \end{cases} \end{aligned}$$

1 Punkt

und

$$\begin{aligned} u_2(x,t) &= \begin{cases} 16/5, & x < 3t, \\ 8/5, & x > 3t \end{cases} + \begin{cases} 4/5, & x < -2t, \\ -3/5, & x > -2t \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4, & x < -2t, \\ 13/5, & -2t < x < 3t, \\ 1, & x > 3t. \end{cases} \end{aligned}$$

1 Punkt

Aufgabe 7.

Betrachten Sie die Advektionsgleichung

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0 \qquad \forall x \in \Omega,$$

wobei $a \in \mathbb{R}^+$. Die Gleichung wird mittels finiter Differenzen wie folgt diskretisiert:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\frac{\lambda}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n).$$

Hier repräsentiert u_i^n die Lösung an dem i-ten Gitterpunkt zum n-ten Zeitschritt. Weiter ist λ der Quotient aus Δt und Δx, also $\lambda = \Delta t/\Delta x$.
Zu zeigen sind folgende Aussagen:

a) Die Diskretisierung ist mindestens erster Ordnung konsistent.

b) Der Verstärkungsfunktion $C(\theta) = \dfrac{c_k^{n+1}}{c_k^n}$ is gegeben durch

$$C(\theta) = 1 - \hat{\imath}\lambda a \ \sin(\theta)$$

wobei $\theta = k\pi\Delta x$ mit k als Wellenzahl der Fourier-Mode.

c) Für welche λ ist die obige Diskretisierung stabil.

2+1+2 Punkte

Lösung.

a) Let u represent the exact solution to our advection equation. Then Taylor's series expansion provides us with

$$\begin{aligned} u(x_i - \Delta x, t_n) &= u(x_i, t_n) - \Delta x \partial_x u|_{x=x_i, t=t_n} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ u(x_i + \Delta x, t_n) &= u(x_i, t_n) + \Delta x \partial_x u|_{x=x_i, t=t_n} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ u(x_i + \Delta x, t_n) - u(x_i - \Delta x, t_n) &= 2\ \Delta x \partial_x u|_{x=x_i, t=t_n} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ u(x_i, t_n + \Delta t) &= u(x_i, t_n) + \Delta t \partial_t u|_{x=x_i, t=t_n} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ u(x_i, t_n + \Delta t) - u(x_i, t_n) &= \Delta t \partial_t u|_{x=x_i, t=t_n} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

1 Punkt

Substituting the above relation into our discretization and dividing by Δt, we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{L} =& \partial_t u|_{x=x_i, t=t_n} + \mathcal{O}(\Delta t) + a\partial_x u|_{x=x_i, t=t_n} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ =& \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x) \end{aligned}$$

In writing the above relation we have used $\partial_t u|_{x=x_i, t=t_n} + a\partial_x u|_{x=x_i, t=t_n} = 0$. Hence the scheme is at least first order consistent.

1 Punkt

b) Consider the following Fourier ansatz for our grid function u_h

$$u_i^n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^n \phi_{k,i}$$

where N is the total number of grid points and $\phi_{k,i} = e^{\hat{\imath}k\pi i\Delta x}$. Also, due to the definition of $\phi_{k,i}$ we have

$$\phi_{k,i+m} = e^{\hat{\imath}k\pi(i+m)\Delta x} = \mu_k^m \phi_{k,i}$$

where $\mu_k^m = e^{\hat{i}k\pi m\Delta x}$. Substituting our ansatz into our discretization, we obtain

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k^{n+1}\phi_{k,i} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^n\phi_{k,i}\left(1 - \frac{a}{2}\lambda(\mu_k^1 - \mu_k^{-1})\right)$$

Using the fact that $\phi_{k,i}$ are orthogonal, we obtain the following relation between c_k^{n+1} and c_k^n

$$c_k^{n+1} = c_k^n\left(1 - \frac{a}{2}\lambda(\mu_k^1 - \mu_k^{-1})\right)$$

The amplification function $C(\theta) = \dfrac{c_k^{n+1}}{c_k^n}$ and thus

$$C(\theta) = 1 - \hat{i}\lambda a\ \sin(\theta)$$

1 Punkt

c) For the scheme to be stable $|C(\theta)| = |\dfrac{c_k^{n+1}}{c_k^n}| < 1$. Therefore,

$$|\frac{c_k^{n+1}}{c_k^n}|^2 = 1 + \lambda^2 a^2 sin^2(\theta).$$

There exist no λ such that the scheme is stable.

2 Punkte

Aufgabe 8.

Betrachte für drei Zellmittelwerte $u_{i-1},\ u_i,\ u_{i+1}$ die limitierten Rekonstruktionen

$$u^+(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) = u_i + \frac{1}{2}\Phi(\theta_i)(u_i - u_{i-1})\ ,$$
$$u^-(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) = u_i - \frac{1}{2}\Phi(\theta_i)(u_i - u_{i-1})$$

mit einer Limiter-Funktion Φ und $\theta_i = \dfrac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}}$.

a) Zeigen Sie, dass für $\Phi = \dfrac{1+\theta}{2}$ die Rekonstruktion $u^\pm = u_i \pm \dfrac{\Delta x}{2}\partial_x u|_i$ entsteht mit zentralen Differenzen für $\partial_x u|_i$.

b) Sei $(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) = (a, b, c)$. Aus Symmetriegründen muss gelten $u^+(a, b, c) = u^-(c, b, a)$. Leiten Sie daraus die Bedingung $\Phi(\theta) = \theta\ \Phi(\frac{1}{\theta})$ her ($\theta > 0$).

c) Gegeben sei der Limiter $\Phi(\theta) = min(\alpha\theta, \frac{1+\theta}{2}, \beta)$ mit $\alpha, \beta \geq 1$. Skizzieren Sie diesen Limiter für $\theta > 0$. Welche Beziehung für α, β folgt aus der Symmetrie in (b).

2.5+1+1.5 Punkte

Lösung.

a) By substituting $\Phi = \dfrac{1+\theta}{2}$ and $\theta_i = \dfrac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}}$ in definition of $u^\pm$, it follows

$$u^\pm = u_i \pm \frac{1}{2}(\frac{1+\theta}{2})(u_i - u_{i-1})$$

0.5 Punkte

$$u^\pm = u_i \pm \frac{1}{4}(1 + \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}})(u_i - u_{i-1})$$

0.5 Punkte

$$u^\pm = u_i \pm \frac{1}{4}(u_{i+1} - u_{i-1})$$

0.5 Punkte

$$u^\pm = u_i \pm \frac{\Delta x}{2}(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x})$$

0.5 Punkte

where $\dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = \partial_x u|_i + \mathcal{O}(\Delta x^2)$ based on Central Difference of first order derivative. Therefore, by ignoring higher order terms

$$u^\pm = u_i \pm \frac{\Delta x}{2}\partial_x u|_i.$$

0.5 Punkte

b) From symmetry condition $u^+(a,b,c) = u^-(c,b,a)$ and substituting definition of $u^\pm$, it follows

$$b + \frac{1}{2}\Phi(\frac{c-b}{b-a})(b-a) = b - \frac{1}{2}\Phi(\frac{a-b}{b-c})(b-c).$$

0.5 Punkte

Having $\theta > 0$ ($\theta \neq 0$), it follows

$$\Phi(\frac{c-b}{b-a}) = \frac{c-b}{b-a}\Phi(\frac{a-b}{b-c}).$$

which is $\Phi(\theta) = \theta\ \Phi(\frac{1}{\theta})$.

0.5 Punkte

c) Sketch of given limiter is drawn in Fig. **??** depicted by blue line.

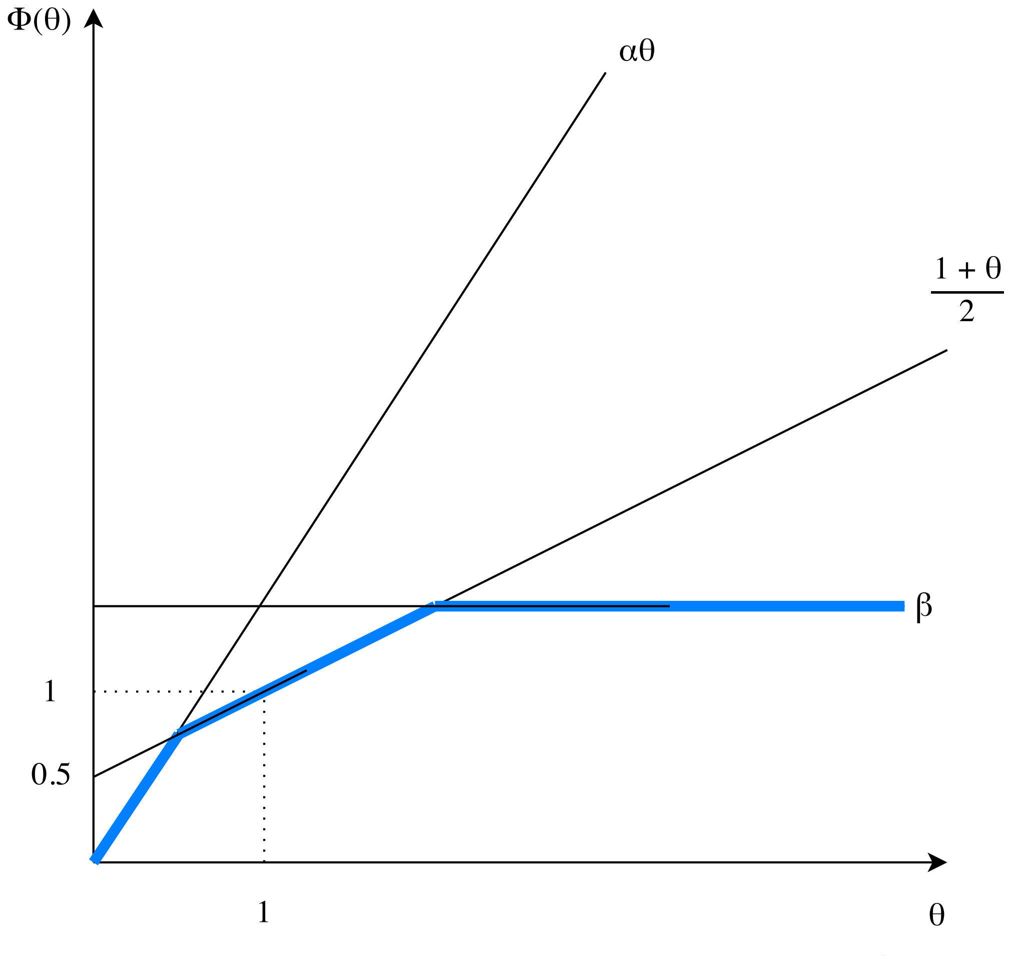


Abbildung 2: Sketch of the limiter function $\Phi(\theta) = min(\alpha\theta, \frac{1+\theta}{2}, \beta)$.

1.0 Punkte

Starting from the condition $\Phi(\theta) = \theta\ \Phi(\frac{1}{\theta})$ given in section (b) for symmetric limiter, it follows

$$\begin{aligned}\Phi(\theta) &= \theta\ \Phi(\frac{1}{\theta}) \\ &= \theta\ min(\alpha/\theta, \frac{1+1/\theta}{2}, \beta).\end{aligned}$$

Since $\theta > 0$, θ can be taking inside minimum function

$$min(\alpha\theta, \frac{1+\theta}{2}, \beta) = min(\alpha, \frac{\theta+1}{2}, \beta\theta).$$

Equality enforces $\alpha = \beta$.

0.5 Punkte